

Zur allgemeinen komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

VON

ROBERT INEICHEN

AUS LUZERN

BEGUTACHTET VON

HERRN PROF. DR. R. FUETER

OLTEN 1950

VERLAG OTTO WALTER AG

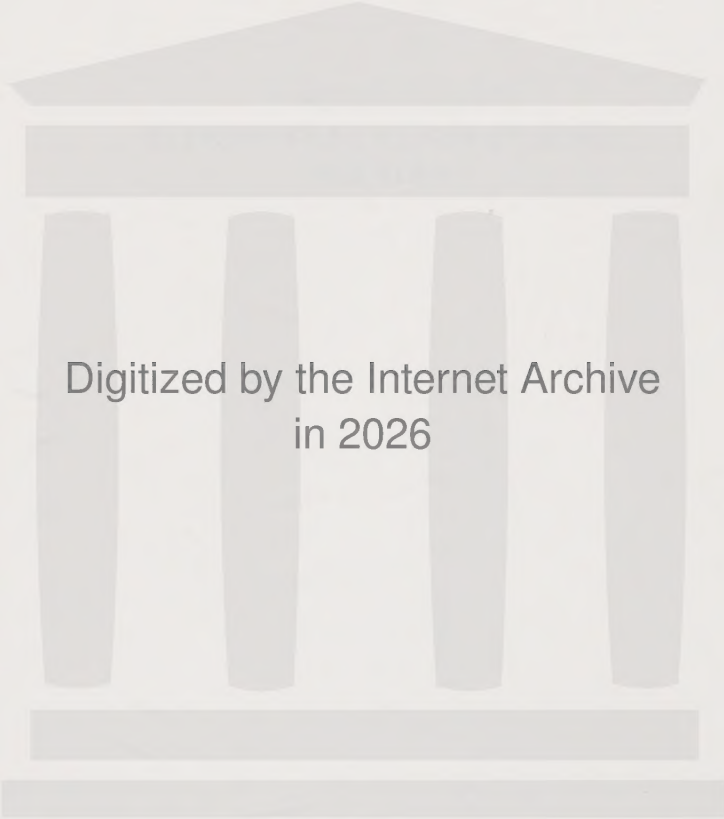
Zur allgemeinen komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE
VORGELEGT DER
PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II
DER
UNIVERSITÄT ZÜRICH
VON
ROBERT INEICHEN
AUS LUZERN
BEGUTACHTET VON
HERRN PROF. DR. R. FUETER

OLTEN 1950
VERLAG OTTO WALTER AG



MEINEN ELTERN
UND LEHRERN IN DANKBARKEIT
GEWIDMET



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

In den Untersuchungen, die schließlich zum Beweis des sogenannten Vollständigkeitssatzes, jenem Analogon zum bekannten KRONECKERSchen Satz über die Einheitswurzeln, durch RUDOLF FUETER führten¹⁾, spielen die Ausführungen über die komplexe Multiplikation die wesentliche Rolle. Es wird dabei die für viele zahlentheoretische Untersuchungen grundlegende Funktion $\mathfrak{Z}(z; \omega_1, \omega_2)$ verwendet²⁾. In jenen Arbeiten sind die komplexen Multiplikationsformeln bei einigen Einschränkungen in der Wahl des singulären Periodenideals und in der Wahl des Multiplikators angegeben³⁾. Insbesondere ist auch der Körper angegeben, dem die auftretenden Koeffizienten angehören; es ist der Ringklassenkörper des Führers ⁴⁾. — In spätern Abhandlungen weist R. FUETER darauf hin, daß sich durch die allgemeinere Formulierung der komplexen Multiplikation als Multiplikation mit einem Ideal eines quadratisch-imaginären Körpers erhebliche Vereinfachungen ergeben⁵⁾:

$$\mathfrak{Z}(nz; \omega_1, \omega_2) = R[\mathfrak{Z}(z; \omega_1, \omega_2)] ,$$

dabei ist R eine rationale Funktion im Körper zugehöriger singulärer Moduln. So enthält diese Formel auch das Reziprozitätsgesetz in quadratisch-imaginären Körpern; es ergibt sich aus der Kongruenz

$$\mathfrak{Z}(\lambda)^{n(p)} \equiv \mathfrak{Z}(p\lambda) \pmod{p} ,$$

wo λ ein Teilungswert mit zu p teilerfremdem Nenner ist. Ferner bringt sie besonders einfach zum Ausdruck, daß die Relativgruppe des Körpers von $\mathfrak{Z}(\lambda)$ in Bezug auf den quadratisch-imaginären Körper holodrisch-isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen in diesem ist⁶⁾.

Die oben angegebene allgemeine komplexe Multiplikationsformel ist unseres Wissens noch nicht bewiesen und allgemein angegeben worden, sicher nicht aus dem Ideenkreis der genannten FUETERSchen Arbeiten, d. h. also nach der klassischen Theorie, gestützt auf die WEIERSTRASS'sche p -Funktion und die

¹⁾ Vollständigkeitssatz: Jede in einem quadratisch-imaginären Körper abelsche Gleichung kann durch singuläre Moduln und singuläre elliptische Funktionen gelöst werden. Vgl. [1], pag. 267; Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

²⁾ Vgl. [1], pag. 98; [3], pag. 43; [7], pag. 4.

³⁾ [1], pag. 117.

⁴⁾ Zur Berechnung der Ringkl. Gl.: [8].

⁵⁾ [2], pag. 336 und 428.

⁶⁾ Ebenfalls [2], pag. 428; vgl. auch [6], pag. 343.

quadratisch-imaginären Zahlkörper⁷⁾. Dieser Beweis soll hier gegeben werden, und es sollen die allgemeinen komplexen Multiplikationsformeln für alle in Betracht kommenden Fälle durchgerechnet werden. Dabei wird nicht die Funktion $\mathfrak{Z}(z; \omega_1, \omega_2)$ verwendet, sondern eine andere passend normierte elliptische Funktion.

Das erste Kapitel bringt die grundlegenden Voraussetzungen und die Eigenschaften der verwendeten Funktion, das zweite die natürliche Multiplikation, das dritte die allgemeine komplexe Multiplikation.

Das Ergebnis der Arbeit kann im folgenden *Hauptsatz der allgemeinen komplexen Multiplikation* zusammengefaßt werden:

Ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal eines quadratisch-imaginären Körpers $k(\sqrt{m})$, $\mathfrak{v}$ ein singuläres Periodenideal, und wählt man die Ideale $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{n}$ und $\overline{\mathfrak{n}}$ nach folgenden, immer erfüllbaren Bedingungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} &= \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{w}, & \mathfrak{m} &= \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}, & (\mathfrak{w}, \mathfrak{n}) &= (1), & \mathfrak{w} &= (\omega_1, \omega_2) \\ (\sigma) &= \mathfrak{n} \cdot \overline{\mathfrak{n}}, & \overline{\mathfrak{w}} &= \overline{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{w}, & (\overline{\mathfrak{n}}, \mathfrak{w}) &= (1), & \overline{\mathfrak{w}} &= (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) \end{aligned}$$

so gilt eine der Formeln:

$$\begin{aligned} A. \quad u(\mathfrak{m}z; \mathfrak{v}) &= u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) = \frac{u_1(z; \mathfrak{w}) A_Z[u(z; \mathfrak{w})]}{u(z; \mathfrak{w}) A_N[u(z; \mathfrak{w})]} \\ B. \quad u(\mathfrak{m}z; \mathfrak{v}) &= u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) = \frac{B_Z[u(z; \mathfrak{w})]}{u_1(z; \mathfrak{w}) \cdot u(z; \mathfrak{w}) \cdot B_N[u(z; \mathfrak{w})]} \\ C. \quad u(\mathfrak{m}z; \mathfrak{v}) &= u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) = \frac{C_Z[u(z; \mathfrak{w})]}{C_N[u(z; \mathfrak{w})]} \end{aligned}$$

Es gilt A, wenn $\sigma \omega_1 \equiv \sigma \omega_2 \equiv \sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2 \overline{\omega}_1}$
und $\sigma \omega_3 \equiv \sigma(\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \overline{\omega}_1$ oder $2 \overline{\omega}_2 \pmod{4 \overline{\omega}_2}$

Es gilt B, wenn $\sigma \omega_1 \equiv \sigma \omega_2 \equiv \sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2 \overline{\omega}_1}$
und $\sigma \omega_3 \equiv \sigma(\omega_1 - \omega_2) \equiv 0$ oder $2 \overline{\omega}_3 \pmod{4 \overline{\omega}_3}$

In allen andern Fällen gilt C.

In $u(z; \mathfrak{w})$ sind die in Zähler und Nenner auftretenden ganzen rationalen Funktionen von folgendem Grad:

$$\begin{array}{ll} A_Z: n(n) - 2 & A_N: n(n) - 2 \\ B_Z: n(n) & B_N: n(n) - 4 \\ C_Z: n(n) & C_N: n(n) - 1 \end{array}$$

Die Koeffizienten der Potenzen von $u(z; \mathfrak{w})$ sind rationale Funktionen der Modulfunktionen⁸⁾ $\mathfrak{f}(\omega_1, \omega_2)$ und $\mathfrak{f}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ mit Koeffizienten aus $k(\sqrt{m})$.

⁷⁾ Vgl. Vorwort zu [1]; für abstrakte und rein-algebraische Begründung [4], [5], [6].

⁸⁾ [1], pag. 104, des Literaturverzeichnisses.

1. Kapitel. Grundlagen

§ 1. Komplexe Multiplikatoren.

Multiplikator des Periodenmoduls $\mathfrak{w}$ heißt jede Zahl σ , für die $\sigma \mathfrak{w}$ in $\mathfrak{w}$ enthalten ist⁹⁾.

Also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= [\omega_1, \omega_2]; \quad \sigma \omega_1 = s_{11} \omega_1 + s_{12} \omega_2 \\ &\quad \sigma \omega_2 = s_{21} \omega_1 + s_{22} \omega_2 \end{aligned} \tag{1}$$

oder: $\sigma^2 - (s_{11} + s_{22})\sigma + (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) = 0$, s_{ik} ganz rational.

Daraus folgt: σ ist entweder ganz rational, oder ganz quadratisch-irrational. Im letzten Falle hat er ferner wegen $\sigma = s_{11} + s_{12} \frac{\omega_2}{\omega_1}$ mit $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil. Ersichtlich bilden die Multiplikatoren einen Ring. Daß nur der Ring der ganzen rationalen Zahlen und Ringe (Ordnungen) in quadratisch imaginären Körpern Multiplikatorringe sind, gilt übrigens allgemein für elliptische Funktionenkörper der Charakteristik Null¹⁰⁾.

Für das Periodenverhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ folgt aus (1):

$$s_{12} \omega_2^2 + (s_{11} - s_{22}) \omega_2 \omega_1 - s_{21} \omega_1^2 = 0 \tag{2}$$

Ein Periodenverhältnis, welches komplexe Multiplikation gestattet, ist somit Wurzel einer quadratischen Form mit negativer Diskriminante¹¹⁾.

Im folgenden setzen wir zusätzlich voraus:

ω_1 und ω_2 sind ganze Zahlen des quadratisch-imaginären Körpers $k(\sqrt{m})$; der Periodenmodul ist dann ein Ideal in $k(\sqrt{m})$. Eine elliptische Funktion mit einem solchen Periodenideal heißt eine singuläre elliptische Funktion.

Es sei nun $u(z; \mathfrak{w})$ eine singuläre elliptische Funktion, welche in z, ω_1, ω_2 homogen von nullter Dimension sein möge. $\mathfrak{n}$ sei ein durch die Basis ν_1, ν_2 gegebenes Ideal aus $k(\sqrt{m})$ und liege in der Idealklasse k . Dann definieren wir nach dem Vorgange von FUETER¹²⁾:

$$u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) \equiv u(\overline{\mathfrak{n}} \mathfrak{n} z; \overline{\mathfrak{n}} \mathfrak{w}) \equiv u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) \tag{3}$$

⁹⁾ Im Anschluß an [5].

¹⁰⁾ Vgl. dazu [4].

¹¹⁾ [12], pag. 720; [11], pag. 581.

¹²⁾ [2], pag. 336.

als die mit dem Ideal $\mathfrak{n}$ komplex multiplizierte Funktion $u(z; \mathfrak{w})$. Dabei bedeuten:

$$\overline{\mathfrak{w}} = \overline{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w} \text{ das Periodenideal } (\omega_1, \omega_2),$$

$$(\sigma) = \overline{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{n} \text{ ein Hauptideal.}$$

Zu dieser Definition (3) ist zu bemerken:

Ein $\overline{\mathfrak{n}}$, welches $\overline{\mathfrak{n}} \mathfrak{n}$ zu einem Hauptideal macht, läßt sich immer finden, da die Idealklassen von $k(\sqrt{m})$ eine Gruppe bilden, deren Einselement die Klasse der Hauptideale, die sogenannte Hauptklasse, ist¹³⁾.

Die Definition hängt nur von der $\overline{\mathfrak{n}}$ enthaltenden Klasse $\overline{k}$ ab, für welche $\overline{k}k = 1$. Denn wenn $\overline{\mathfrak{n}}_1 \sim \overline{\mathfrak{n}}_2$, das heißt $\overline{\mathfrak{n}}_1(\sigma_2) = \overline{\mathfrak{n}}_2(\sigma_1)$,

$$\overline{\mathfrak{n}}_1 \mathfrak{n} = (\sigma_1), \quad \overline{\mathfrak{n}}_2 \mathfrak{n} = (\sigma_2), \quad \overline{\mathfrak{n}}_1 \mathfrak{w} = \overline{\mathfrak{w}}_1, \quad \overline{\mathfrak{n}}_2 \mathfrak{w} = \overline{\mathfrak{w}}_2,$$

so folgt aus dieser Äquivalenz:

$$u(\mathfrak{n} z; \mathfrak{w}) = u(\sigma_1 z; \overline{\mathfrak{w}}_1) = u\left(\frac{\sigma_2 z}{\overline{\mathfrak{n}}_2}; \frac{\overline{\mathfrak{w}}_2}{\overline{\mathfrak{n}}_2}\right) = u(\sigma_2 z; \overline{\mathfrak{w}}_2).$$

Analog zeigt man, daß hingegen äquivalente Ideale $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$, mit denen man komplex multipliziert, ungleiche $u(\mathfrak{n} z; \mathfrak{w})$ ergeben, es sei denn $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2$.

Endlich bemerken wir noch, daß $u(\mathfrak{n} z; \mathfrak{w})$ auch wieder die Perioden ω_1 und ω_2 hat:

$$u[\mathfrak{n}(z + \omega_i); \mathfrak{w}] = u(\sigma z + \sigma \omega_i; \overline{\mathfrak{w}}) \quad i = 1, 2$$

da $\overline{\mathfrak{n}} / (\sigma)$, so ist $\sigma \omega_i \in \overline{\mathfrak{w}}$, also

$$u[\mathfrak{n}(z + \omega_i); \mathfrak{w}] = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) = u(\mathfrak{n} z; \mathfrak{w}).$$

Ferner setzen wir $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{n}$ als teilerfremd voraus; hätte ein zur Multiplikation verwendetes Ideal $\mathfrak{m}$ mit dem Periodenideal $\mathfrak{v}$ den größten gemeinschaftlichen Teiler $\mathfrak{g}$, so könnten wir diesen zufolge der Homogenität nullter Dimension wegschaffen:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}; \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{w};$$

$$u(\mathfrak{m} z; \mathfrak{v}) = u(\mathfrak{n} \mathfrak{g} z; \mathfrak{g} \mathfrak{w}) = u(\sigma \gamma z; \gamma \overline{\mathfrak{w}}) = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}), \quad (4)$$

wenn $\mathfrak{g} \cdot \overline{\mathfrak{g}} = (\gamma)$ Hauptideal ist.

$$\text{Es sei also stets:} \quad (\mathfrak{n}, \mathfrak{w}) = (1) \quad (5)$$

Es soll nun gezeigt werden:

$$u(\mathfrak{n} z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) = R[u(z; \mathfrak{w}), u_1(z; \mathfrak{w})] \quad (6)$$

wo R eine rationale Funktion von u und seiner Ableitung u_1 mit Koeffizienten aus dem Körper zugehöriger singulärer Moduln ist.

(6) heißt: *allgemeine komplexe Multiplikationsformel*.

¹³⁾ Über alle hier und im folgenden verwendeten Begriffe und Sätze aus der Theorie der quadratisch-imaginären Körper sei auf [1], pag. 49 ff. verwiesen.

Offensichtlich ist in (3) und (6) der Fall des natürlichen Multiplikators n eingeschlossen; bei der Behandlung dieses Falles im Kapitel 2 lassen wir die Voraussetzung (5) weg.

Die ganzen Zahlen aus $k(\sqrt{m})$ sind gegeben durch das Ideal $(1, \omega)$; $\omega = \sqrt{m}$, wenn $m \not\equiv 1 \pmod{4}$, sonst $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{m})$.

§ 2. Definition und Eigenschaften der Funktion $u(z)$.

Wir definieren durch die WEIERSTRASS'sche p -Funktion:

$$u(z; \mathfrak{w}) = u(z; \omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\mathfrak{t}}{3e_3}} \cdot p'(z)}{p(z) - e_3} \quad (7)$$

dabei ist $\mathfrak{t} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \frac{4 \cdot 3 \cdot e_3}{p \left(\frac{\omega_3}{4} \right) - e_3}$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $e_3 = p \left(\frac{\omega_3}{2} \right)$

Unsern Betrachtungen legen wir das durch die Eckpunkte $\pm \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ gegebene Periodenparallelogramm P zugrunde; von seinen Seiten sollen $-\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ und $-\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ zum Diskontinuitätsbereich gehören.

Aus den bekannten Eigenschaften der p -Funktion folgt sofort¹⁴⁾:

1. Satz: Die Funktion $u(z; \mathfrak{w})$ ist eine ungerade, singuläre elliptische Funktion zweiter Ordnung mit den Perioden ω_1 und ω_2 . Sie hat Pole erster Ordnung für $z \equiv 0$, $-\frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$, Nullstellen erster Ordnung für $z \equiv -\frac{\omega_1}{2}$, $-\frac{\omega_2}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$. Sie ist in z , ω_1 , ω_2 homogen von nullter Dimension.

Aus der Reihenentwicklung des Zählers und des Nenners nach $\zeta = 2 \sqrt{\frac{3e_3}{\mathfrak{t}}} z$ folgt:

$$u(z) = \frac{2}{\zeta} + \frac{\mathfrak{t}}{2 \cdot 3} \zeta + \dots$$

Wir bestimmen die Koeffizienten von ζ :

$$\text{Aus } \frac{p(z)}{e_3} - 1 = \frac{4 \cdot 3}{\mathfrak{t} \zeta^2} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathfrak{t}) \zeta^{2k}, \quad (8)$$

$a_k(\mathfrak{t})$ sind rationale Funktionen von $\mathfrak{t}$ mit rationalen Zahlkoeffizienten¹⁵⁾,

¹⁴⁾ [1], pag. 79ff.

¹⁵⁾ [1], pag. 93.

folgt:

$$\frac{1}{\frac{p(z)}{e_3} - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{2k} \quad (9)$$

Aus dem Produkt von (8) und (9) ergibt sich:

$$b_1 = \frac{1}{a_{-1}} = \frac{t}{4 \cdot 3} \text{ und allgemein } -b_k + a_{-1} b_{k+1} + \sum_{i,j} a_j b_i = 0, i+j=k; \\ i, j \geq 1.$$

Aus (8) folgt:

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{3e_3}} \cdot \frac{p'(z)}{e_3} = \frac{2^3 \cdot 3}{t \cdot \zeta^3} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \zeta^{2k-1} \quad (10)$$

Aus (9) und (10):

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k-1} \zeta^{2k-1} \quad \text{mit } d_{-1} = c_{-1} b_1, \\ \text{allgemein: } d_{2k-1} = c_{-1} b_{k+1} + \sum_{i,j} c_i b_j, \\ i+j=k, i, j \geq 1$$

Aus der Eigenschaft der $a_k(t)$ folgt dasselbe für die b_k und die c_k .

Es gilt:

2. Satz: Die Funktion $u(z)$ besitzt um den Pol $z=0$ die Reihenentwicklung

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k-1}(t) \zeta^{2k-1} \quad (11)$$

Dabei sind die d_{2k-1} rationale Funktionen von t mit rationalen Koeffizienten.

Es ist $d_{-1} = 2$, $d_1 = \frac{1}{2 \cdot 3}$.

Von $t(\omega_1, \omega_2)$ seien folgende Eigenschaften vermerkt:

$t(\omega_1, \omega_2)$ ist eine Modulfunktion vierter Stufe; $t(\omega_1, \omega_2)$ ist eine rationale Funktion der Modulfunktionen $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ und $j\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{4\omega_1}\right)$ mit rationalen Koeffizienten; t ist eine ganze algebraische Zahl¹⁶⁾.

Da $u(z)$ und $u\left(z + \frac{\omega_3}{2}\right)$ gleiche Pole und gleiche Nullstellen derselben Ordnung haben, gilt nach einem bekannten Satz der Theorie der elliptischen Funktionen¹⁷⁾:

$$u(z) = u\left(z + \frac{\omega_3}{2}\right) \cdot C, \text{ für } z \equiv -\frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}} \text{ folgt } C = -1.$$

¹⁶⁾ [1], pag. 104.

¹⁷⁾ [9], pag. 53.

$$\text{Somit } u(z) = -u\left(z + \frac{\omega_3}{2}\right) \quad (12)$$

Da $u(z)$ elliptisch von zweiter Ordnung ist, gilt:

3. Satz: Es ist dann und nur dann $u(z_1) = u(z_2)$ mit $z_1 \not\equiv z_2 \pmod{\omega}$, wenn $z_1 \equiv -z_2 - \frac{\omega_3}{2} \pmod{\omega}$.

§ 3. Ableitung und Differentialgleichung.

Um wieder eine in z, ω_1, ω_2 von nullter Dimension homogene Funktion zu erhalten, leiten wir nach $\zeta = 2 \sqrt{\frac{3e_3}{t}} z$ ab und bezeichnen diese Ableitung mit $u_1(z)$:

$$u_1(z) = u'(z) \cdot \frac{dz}{d\zeta}$$

Unter Benutzung der Differentialgleichung der p -Funktion erhalten wir:

$$u_1(z) = -\frac{t}{3e_3} \cdot \frac{p(z)^2 - 2e_3 p(z) + e_1 e_3 + e_2 e_3 - e_1 e_2}{2[p(z) - e_3]} \quad (13)$$

$$e_i = p\left(\frac{\omega_i}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3$$

Homogenität nullter Dimension, vierte Ordnung und Pole ergeben sich aus (13) ohne weiteres. Für die Nullstellen ergibt (13):

$$p(z)_{1,2} = e_3 \pm \sqrt{e_3^2 - (e_1 e_3 + e_2 e_3 - e_1 e_2)}.$$

Nun hängen aber die Nullstellen von $u(z)$ in einfacher Weise von den Perioden ab:

$u_1(z)$ hat vier Nullstellen erster Ordnung $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$, denn sie ist Ableitung einer elliptischen Funktion zweiter Ordnung. Dann haben $\frac{1}{u(z) - u(\alpha)}$ und $p(z - \alpha)$ beide in P nur einen Pol zweiter Ordnung für $z = \alpha$.

Daraus folgt¹⁸⁾:

$$\frac{1}{u(z) - u(\alpha)} - A p(z - \alpha) = B \quad A, B = \text{constans, nicht beide Null.} \quad (14)$$

Für $z = 0, -\frac{\omega_3}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A p(\alpha) + B &= 0 \\ A p\left(\alpha + \frac{\omega_3}{2}\right) + B &= 0 \end{aligned}$$

¹⁸⁾ [9], pag. 53.

Somit

$$\begin{vmatrix} p(\alpha) & 1 \\ p\left(\alpha + \frac{\omega_3}{2}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad p(\alpha) = p\left(\alpha + \frac{\omega_3}{2}\right),$$

oder da $p(z)$ gerade und von zweiter Ordnung ist

$$\alpha = -\frac{\omega_3}{4} + \frac{a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2}{2} \quad a_1, a_2 \text{ ganz rational.}$$

Dasselbe läßt sich für β durchführen. Man erkennt als Nullstellen in P : $\pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}$.

Es gilt also

4. Satz: $u_1(z)$ ist eine gerade, singuläre elliptische Funktion vierter Ordnung mit den Perioden ω_1 und ω_2 . Sie ist in z, ω_1, ω_2 homogen von nullter Dimension. Sie hat Pole zweiter Ordnung für $z = 0, -\frac{\omega_3}{2} \pmod{\omega}$ und Nullstellen erster Ordnung für $z \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{\omega}$.

Aus der Betrachtung der für $u(z)$ möglichen Reihenentwicklungen folgt mit Benutzung des obigen Satzes:

5. Satz: $u(z)$ nimmt für jedes z in P seinen Wert von erster Ordnung an mit Ausnahme der Werte, die es für $z = \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}$ annimmt.

Wir verifizieren noch den Satz, daß jede elliptische Funktion einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung mit von z unabhängigen Koeffizienten genügt¹⁹⁾:

$$f(z) = \left[u(z)^2 - u\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2 \right] \left[u(z)^2 - u\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right)^2 \right]$$

und $u_1(z)^2$ haben dieselben Nullstellen und Pole derselben Ordnung.

Somit ist $u_1(z)^2 = C \cdot f(z)$.

Mit Hilfe der Reihenentwicklung von Satz 2 findet man $C = \frac{1}{4}$. Somit haben wir die Differentialgleichung:

$$u_1(z)^2 = \frac{1}{4} \left[u(z)^2 - u\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2 \right] \left[u(z)^2 - u\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right)^2 \right] \quad (15)$$

Daraus finden wir durch Ableiten nach ζ :

$$u_{11}(z) = \frac{d u_1(z)}{d \zeta} = \frac{1}{4} \left\{ 2 u(z)^3 - u(z) \left[u\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2 + u\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right)^2 \right] \right\}.$$

¹⁹⁾ [9], pag. 92.

Wir betrachten noch die Koeffizienten von (15). Aus (7) folgt zunächst²⁰⁾:
 $u(z) = \frac{\mathfrak{I}_1(z)}{\mathfrak{I}(z)}$ und unter Berücksichtigung der Eigenschaften von $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}$
 $u\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2 = \mathfrak{I}_1\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2 = 4 + \mathfrak{t} + 4 = \mathfrak{t} + 8$ (16)

Setzt man (16) in (15) ein, und entwickelt um $z = 0$ nach, so findet man durch Koeffizientenvergleich

$$u\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right) = \mathfrak{t} - 8$$
 (17)

Wir fassen zusammen:

6. Satz: $u(z)$ genügt der algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung und vierten Grades in $u(z)$

$$u_1(z)^2 = \frac{1}{4} [u(z)^2 - \mathfrak{t} - 8] [u(z)^2 - \mathfrak{t} + 8]$$

und der algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung und dritten Grades

$$u_{11}(z) = \frac{1}{2} [u(z)^3 - \mathfrak{t} \cdot u(z)].$$

§ 4. Rekursionsformel.

Um für den Fall des ganzen rationalen Multiplikators über die auftretenden Koeffizienten Aufschluß zu erhalten, leiten wir eine Rekursionsformel her.

Es sei t eine zweite komplexe Variable. Als Funktionen von z haben dann folgende Funktionen gleiche Pole und Nullstellen von derselben Ordnung:

$$g(z, t) = u(z + t) \cdot u(z - t)$$

$$\text{und } f(z, t) = \frac{\left[u(z) + u\left(t + \frac{\omega_1}{2}\right) \right] \left[u(z) + u\left(t + \frac{\omega_2}{2}\right) \right]}{u(z)^2 - u(t)^2}$$
 (18)

$$\text{Nach Satz 3: } u\left(t + \frac{\omega_2}{2}\right) = u\left(-t - \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_3}{2}\right) = -u\left(t + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\text{also } f(z, t) = \frac{u(z)^2 - u\left(t + \frac{\omega_1}{2}\right)^2}{u(z)^2 - u(t)^2}$$

$$\text{Nun gilt in bekannter Weise: } u(t)^2 = \frac{A}{u\left(t + \frac{\omega_1}{2}\right)^2}$$
 (19)

²⁰⁾ [1], pag. 91 ff., $\mathfrak{I}_1(z) = \frac{d \mathfrak{I}(z)}{d\zeta}$, vgl. auch Einleitung.

$$\text{Nach (16) und (17) für } t = \frac{\omega_2}{4}: \quad t + 8 = \frac{A}{t - 8}, \quad A = t^2 - 2^6 \quad (20)$$

Nach (19) und (20) ist jetzt:

$$u(z+t) \cdot u(z-t) = C \cdot \frac{u(z)^2 - \frac{t^2 - 2^6}{u(t)^2}}{u(z)^2 - u(t)^2}$$

Dabei ist C in bezug auf z eine Konstante. Für $z \equiv -\frac{\omega_1}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$ folgt unter Beachtung von (19) und (20):

$$-\frac{t^2 - 2^6}{u(t)^2} = C \cdot \frac{t^2 - 2^6}{u(t)^4} \quad \text{also } C = -u(t)^2$$

Wir erhalten die folgende einfache Formel:

$$u(z+t) \cdot u(z-t) = \frac{t^2 - 2^6 - u(z)^2 u(t)^2}{u(z)^2 - u(t)^2} \quad (21)$$

Nun berechnen wir $u(2z)$ aus

$$\lim_{t \rightarrow z} u(z+t) = u(2z) = \lim_{t \rightarrow z} \frac{t^2 - 2^6 - u(z)^2 u(t)^2}{u(z-t) [u(z)^2 - u(t)^2]}$$

Die Berechnung ergibt:

$$u(2z) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{u(z)^4 + 2^6 - t^2}{u(z) u_1(z)} \quad (22)$$

Durch Differentiation findet man daraus

$$u_1(2z) = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{3u(z)^4 + t^2 - 2^6}{2u(z)^2} - \frac{u_{11}(z) [u(z)^4 - t^2 + 2^6]}{2u(z) u_1(z)^2} \right\} \quad (23)$$

Nach Satz 6 lassen sich hier $u_{11}(z)$ und $u_1(z)^2$ wieder durch Funktionen von $u(z)$ ersetzen.

Setzen wir nun in (21) $t = 2mz$, so erhalten wir

$$u(z+2mz) u(z-2mz) = \frac{t^2 - 2^6 - u(z)^2 u(2mz)^2}{u(z)^2 - u(2mz)^2}$$

$$\text{oder } u[(2m+1)z] = \frac{2^6 - t^2 + u(z)^2 u(2mz)^2}{u[(2m-1)z] [u(z)^2 - u(2mz)^2]} \quad (24)$$

Formel (24) stellt in Verbindung mit (22) und (23) eine Rekursionsformel dar. Sie gestattet, für jedes ganze rationale n $u(nz)$ zu berechnen, wenn nur die $u(n'z)$, $n' < n$, bekannt sind, da ja $u(2z)$ und $u_1(2z)$ bekannt sind. — Wir können den Satz aussprechen:

7. Satz: Für jedes ganze rationale n läßt sich $u(nz)$ als rationale Funktion von $u(z)$ oder von $u(z)$ und $u_1(z)$ darstellen. Die auftretenden Koeffizienten sind rationale Funktionen von t mit rationalen Koeffizienten.

Die folgende Untersuchung soll ergeben, wann $u(z)$ allein, wann auch seine Ableitung auftritt.

2. Kapitel.

Natürliche Multiplikation

§ 1. Pole und Nullstellen.

$u(nz)$ soll ohne rekurrentes Verfahren rational durch $u(z)$ und $u_1(z)$ ausgedrückt werden. Dabei sei n ganz rational und positiv. Dies ist wegen $u(z) = -u(-z)$ keine Einschränkung.

$u(nz)$ hat Nullstellen erster Ordnung bei

$$nz \equiv -\frac{\omega_1}{2}, -\frac{\omega_2}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$$

also für

$$\begin{aligned} z &= \lambda_1 = -\frac{\omega_1}{2n} + \frac{\Omega_1}{n} \\ z &= \lambda_2 = -\frac{\omega_2}{2n} + \frac{\Omega_2}{n} \end{aligned} \quad \Omega_h = x_{h1} \omega_1 + x_{h2} \omega_2 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x_{h1}, x_{h2} &\text{ ganz rational.} \\ h &= 1 \dots 4 \end{aligned}$$

und Pole erster Ordnung bei

$$nz \equiv 0, -\frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$$

also für

$$\begin{aligned} z &= \lambda_3 = -\frac{\omega_3}{2n} + \frac{\Omega_3}{n} \\ z &= \lambda_4 = \frac{\Omega_4}{n} \end{aligned} \quad (26)$$

$u(nz)$ ist periodisch; als Nullstellen und Pole interessieren uns somit nur die modulo $\mathfrak{w}$ inkongruenten Werte. Diese erhalten wir alle, wenn x_{h1}, x_{h2} etwa das kleinste positive Restsystem modulo n durchlaufen. In bezug auf das fundamentale Periodenparallelogramm P ist $u(nz)$ von der Ordnung $2n^2$.

Nun konstruieren wir vorerst eine Funktion

$$\varphi_n(z) = \frac{\prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)] \cdot \prod_{\lambda_2} [u(z) - u(\lambda_2)]}{\prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)] \cdot \prod_{\lambda_4} [u(z) - u(\lambda_4)]} \quad (27)$$

mit möglichst denselben Nullstellen und Polen wie $u(nz)$. Die Produkte erstrecken sich dabei über verschiedene Kombinationen x_{h1}, x_{h2} , $h = 1 \dots 4$, aus der Folge $0, 1, 2, \dots (n-1)$.

Nach den Sätzen 1, 3, 5 sind vorerst folgende Kombinationen x_{h1}, x_{h2} in (27) auszuschließen:

$$(A) \quad \lambda_h \equiv 0, -\frac{\omega_k}{2} \pmod{\mathfrak{w}} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3 \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{matrix}$$

Für solche λ_h ist $u(\lambda_h) = 0$ oder ∞ .

$$(B) \quad \lambda_h \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{\mathfrak{w}} \quad h = 1, 2, 3, 4$$

Für solche λ_h nimmt $u(\lambda_h)$ seine Werte von zweiter Ordnung an. (28)

$$(C) \quad \lambda_h + \lambda_l \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}} \quad h, l = 1, 2, 3, 4$$

Für solche λ_h und λ_l gilt $u(\lambda_h) = u(\lambda_l)$.

Aus solchen Paaren darf in (27) nur eines auftreten.

Untersucht man die Kongruenzen (28) für alle h, k und l , und läßt man die x_{h1}, x_{h2} Zahlen der Folge $0, 1, 2, \dots (n-1)$ durchlaufen, so erkennt man, daß folgende Kombinationen auszulassen sind (A und B) oder nicht miteinander auftreten dürfen (C):

$$n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$(28A): \quad x_{11} = \frac{n+1}{2}, x_{12} = 0; x_{21} = 0, x_{22} = \frac{n+1}{2}; x_{31} = x_{32} = \frac{n+1}{2}; \\ x_{41} = x_{42} = 0 \quad (29)$$

$$(28C): \quad x_{11}, x_{12} \text{ und } x_{21} \equiv \frac{n+1}{2} - x_{11}, x_{22} \equiv \frac{n+1}{2} - x_{12} \pmod{n} \\ x_{31}, x_{32} \text{ und } x_{41} \equiv \frac{n+1}{2} - x_{31}, x_{42} \equiv \frac{n+1}{2} - x_{32} \pmod{n}$$

$$n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$(28A): \quad x_{41} = \frac{n}{2}, x_{42} = 0; x_{41} = 0, x_{42} = \frac{n}{2}; x_{41} = x_{42} = \frac{n}{2}; x_{41} = x_{42} = 0$$

$$(28B): \quad n \equiv 2 \pmod{4}: \quad x_{31} = x_{32} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}; x_{31} = x_{32} = \frac{3n}{4} + \frac{1}{2};$$

$$x_{31} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, x_{32} = \frac{3n}{4} + \frac{1}{2};$$

$$x_{31} = \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, x_{32} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2};$$

$$n \equiv 0 \pmod{4}: \quad x_{41} = x_{42} = \frac{n}{4}; x_{41} = x_{42} = \frac{3n}{4};$$

$$x_{41} = \frac{3n}{4}, x_{42} = \frac{n}{4}; x_{41} = \frac{n}{4}, x_{42} = \frac{3n}{4}; \quad (30)$$

$$(28C): \quad x_{11}, x_{12} \text{ und } x_{11}' \equiv \frac{n}{2} + 1 - x_{11}, x_{12}' \equiv \frac{n}{2} - x_{12} \pmod{n}$$

$$x_{21}, x_{22} \text{ und } x_{21}' \equiv \frac{n}{2} - x_{21}, x_{22}' \equiv \frac{n}{2} + 1 - x_{22} \pmod{n}$$

$$x_{31}, x_{32} \text{ und } x_{31}' \equiv \frac{n}{2} + 1 - x_{31}, x_{32}' \equiv \frac{n}{2} + 1 - x_{32} \pmod{n}$$

$$x_{41}, x_{42} \text{ und } x_{41}' \equiv \frac{n}{2} - x_{41}, x_{42}' \equiv \frac{n}{4} - x_{42} \pmod{n}$$

§ 2. Multiplikationsformeln.

Wir haben die Fälle $n \equiv 1 \pmod{2}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$, $n \equiv 0 \pmod{4}$ gesondert zu betrachten.

1. $n \equiv 1 \pmod{2}$

Wir entnehmen aus (29), daß alle x_{21} , x_{22} und alle x_{41} , x_{42} weggelassen werden können.

Unter Beachtung von (29) gilt in bekannter Weise:

$$u(nz) = c_1 \cdot u(z) \frac{\prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)]}{\prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)]}, \quad c_1 = \text{constans} \quad (31)$$

Der Grad des Zählers ist n^2 , der des Nenners ist $n^2 - 1$. Die Konstante c_1 ergibt sich aus

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(nz)}{u(z)} = c_1 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)^{n^2-1} \left\{ 1 + \frac{K_1}{u(z)} + \dots \right\}}{u(z)^{n^2-1} \left\{ 1 + \frac{K_2}{u(z)} + \dots \right\}} = c_1$$

Benutzen wir die Reihenentwicklung des Satzes 2, so erhalten wir

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(nz)}{u(z)} = \frac{1}{n} = c_1$$

2. $n \equiv 2 \pmod{4}$

Die x_{11} , x_{12} durchlaufen nach (30) die folgenden Wertepaare:

$$\begin{array}{lll} 0,0 & 0,1 \dots & 0, \quad n-1 \\ 1,0 & 1,1 \dots & 1, \quad n-1 \\ \vdots & & \\ \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, 0 & \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{4} - \frac{1}{2}; \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + 1 \dots \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}; & \\ \frac{n}{2} + 2, 0 & \frac{n}{2} + 2, 1 \dots & \frac{n}{2} + 2, \quad n-1 \\ \frac{n}{2} + 3, 0 & \frac{n}{2} + 3, 1 \dots & \frac{n}{2} + 3, \quad n-1 \\ \vdots & & \\ \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, 0 & \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{4} - \frac{1}{2}; \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + 1 \dots \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}. & \end{array} \quad (32)$$

Also $\frac{n^2}{2}$ Kombinationen.

Für die x_{21}, x_{22} können wir (32) verwenden, wenn wir als x_{21} die x_{12} und als x_{22} die x_{11} nehmen.

Die x_{31}, x_{32} durchlaufen nach (30) die folgenden Wertepaare:

$$\begin{array}{lll}
 0,0 & 0,1 \dots & 0, \quad n-1 \\
 1,0 & 1,1 \dots & 1, \quad n-1 \\
 \vdots & & \\
 \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, 0 & \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{4} - \frac{1}{2}; \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + 2, \dots & \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}; \\
 \frac{n}{2} + 2, 0 & \frac{n}{2} + 2, 1 \dots & \frac{n}{2} + 2, \quad n-1 \\
 \frac{n}{2} + 3, 0 & \frac{n}{2} + 3, 1 \dots & \frac{n}{2} + 3, \quad n-1 \\
 \vdots & & \\
 \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, 0 & \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{n}{4} - \frac{1}{2}; \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3n}{4} + 2, \dots & \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}, \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}.
 \end{array} \quad (33)$$

Also $\frac{1}{2}(n-2)n + 2\left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{n^2}{2} - 2$ Kombinationen.

Die x_{41}, x_{42} durchlaufen nach (30) die folgenden Wertepaare:

$$\begin{array}{lll}
 & 0,1 & 0,2 \dots & 0, \frac{n}{2} - 1; 0, \frac{n}{2} + 1 \dots & 0, \quad n-1 \\
 1,0 & 1,1 & 1,2 \dots & & 1, \quad n-1 \\
 2,0 & 2,1 & 2,2 \dots & & 2, \quad n-1 \\
 \vdots & & & & \\
 \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, 0 & \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, 1 & \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, 2 \dots & & \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, n-1 \\
 \frac{n}{2} + 1, 0 & \frac{n}{2} + 1, 1 & \frac{n}{2} + 1, 2 \dots & & \frac{n}{2} + 1, n-1 \\
 \frac{n}{2} + 2, 0 \dots & & & & \frac{n}{2} + 2, n-1 \\
 \vdots & & & & \\
 \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}, 0 \dots & & & & \frac{3n}{4} - \frac{1}{2}, n-1
 \end{array} \quad (34)$$

Also $\frac{n^2}{2} - 2$ Kombinationen.

Bilden wir jetzt unter Berücksichtigung von (32), (33), (34) die Funktion (27), so gilt:

$$u(nz) = c_2 \frac{1}{u_1(z) u(z)} \quad \varphi_n(z) = c_2 \frac{\prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)] \prod_{\lambda_2} [u(z) - u(\lambda_2)]}{u_1(z) u(z) \prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)] \prod_{\lambda_4} [u(z) - u(\lambda_4)]} \quad (35)$$

$c_2 = \text{constans}$

Die Konstante c_2 erhält man wiederum aus

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(nz) u_1(z)}{u(z)^3} = c_2 = -\frac{1}{2n}$$

Dabei benutzten wir, daß in (35) der Zähler in $u(z)$ vom Grade n^2 und der Nenner vom Grade $n^2 - 3$ ist.

3. $n \equiv 0 \pmod{4}$

Die x_{11}, x_{12} durchlaufen nach (30) folgende Wertepaare:

$$\begin{array}{lll} 0, 0 & 0, 1 \dots & 0, \quad n-1 \\ 1, 0 & 1, 1 \dots & 1, \quad n-1 \\ \vdots & & \\ \frac{n}{4}, 0 & \frac{n}{4}, 1 \dots & \frac{n}{4}, \quad n-1 \\ \frac{n}{2} + 2, 0 & \frac{n}{2} + 2, 1 \dots & \frac{n}{2} + 2, n-1 \\ \frac{n}{2} + 3, 0 & \frac{n}{2} + 3, 1 \dots & \frac{n}{2} + 3, n-1 \\ \vdots & & \\ \frac{3n}{4}, 0 & \frac{3n}{4}, 1 \dots & \frac{3n}{4}, \quad n-1 \end{array} \quad (36)$$

Also $\frac{n^2}{2}$ Kombinationen.

Für die x_{21}, x_{22} können wir (36) verwenden, wenn wir als x_{22} die x_{11} und als x_{21} die x_{12} nehmen.

Für die x_{31} nehmen wir die x_{11} , für die x_{32} die x_{21} aus (36).

Die x_{41}, x_{42} durchlaufen nach (30) die Wertepaare:

$$\begin{array}{llll} 0, 1 & 0, 2 \dots & 0, \frac{n}{2} - 1; \quad 0, \frac{n}{2} + 1, \dots & 0, \quad n-1 \\ 1, 0 & 1, 1 & 1, 2 \dots & 1, \quad n-1 \\ 2, 0 & 2, 1 & 2, 2 \dots & 2, \quad n-1 \\ \vdots & & & \\ \frac{n}{4}, 0 & \frac{n}{4}, 1 & \frac{n}{4}, 2 \dots & \frac{n}{4}, \frac{n}{2} - 1; \quad \frac{n}{4}, \frac{n}{2} + 1 \dots & \frac{n}{4}, \quad n-1 \\ \frac{n}{2} + 1, 0 & \frac{n}{2} + 1, 1 & \frac{n}{2} + 1, 2 \dots & & \frac{n}{2} + 1, n-1 \\ \frac{n}{2} + 2, 0 & \frac{n}{2} + 2, 1 & \frac{n}{2} + 2, 2 \dots & & \frac{n}{2} + 2, n-1 \\ \vdots & & & & \\ \frac{3n}{4}, 0 & \frac{3n}{4}, 1 & \frac{3n}{4}, 2 \dots & \frac{3n}{4}, \frac{n}{2} - 1; \quad \frac{3n}{4}, \frac{n}{2} + 1, \dots & \frac{3n}{4}, \quad n-1 \end{array} \quad (37)$$

Also $\frac{1}{2}(n-2)n + 2\frac{(n-2)}{2} - 2 = \frac{n^2}{2} - 4$ Kombinationen.

Man findet somit:

$$u(nz) = c_3 \frac{1}{u_1(z)u(z)} \varphi_n(z) = c_3 \frac{\frac{II[u(z) - u(\lambda_1)]}{\lambda_1} \frac{II[u(z) - u(\lambda_2)]}{\lambda_2}}{u_1(z)u(z) \frac{II[u(z) - u(\lambda_3)]}{\lambda_3} \frac{II[u(z) - u(\lambda_4)]}{\lambda_4}} \quad (38)$$

$c_3 = \text{constans}$

Da der Zähler in $u(z)$ wieder vom Grade n^2 , der Nenner vom Grade $n^2 - 3$ ist, so findet man $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2n}$.

Vergleichen wir die eben hergeleiteten Multiplikationsformeln (31), (35), (38) mit der Rekursionsformel (24), so erhalten wir auch Aufschluß über die Koeffizienten der auftretenden Potenzen von $u(z)$. Diese Koeffizienten sind demnach rationale Funktionen von $t(\omega_1, \omega_2)$ mit rationalen Koeffizienten, also algebraische Zahlen.

Wir fassen zusammen:

Hauptsatz der natürlichen Multiplikation:

Ist n eine natürliche Zahl, so gelten die Formeln:

$$u(nz) = \frac{1}{n} \frac{\frac{u(z) II[u(z) - u(\lambda_1)]}{\lambda_1}}{\frac{II[u(z) - u(\lambda_3)]}{\lambda_3}}, \text{ wenn } n \equiv 1 \pmod{2}. \quad (39)$$

Dabei erstrecken sich die Produkte über die in (29) angegebenen Kombinationen.

Grad des Zählers in $u(z)$: n^2

Grad des Nenners in $u(z)$: $n^2 - 1$

$$u(nz) = -\frac{1}{2n} \frac{\frac{II[u(z) - u(\lambda_1)]}{\lambda_1} \frac{II[u(z) - u(\lambda_2)]}{\lambda_2}}{u_1(z)u(z) \frac{II[u(z) - u(\lambda_3)]}{\lambda_3} \frac{II[u(z) - u(\lambda_4)]}{\lambda_4}}, \text{ wenn } n \equiv 0 \pmod{2}. \quad (40)$$

Dabei erstrecken sich die Produkte, je nachdem $n \equiv 2$ oder $\equiv 0$ modulo 4 ist, über die in (32), (33), (34) oder über die in (36) und (37) angegebenen Kombinationen.

Grad des Zählers in $u(z)$: n^2

Grad des Nenners in $u(z)$: $n^2 - 3$.

Die Koeffizienten der Potenzen von $u(z)$ sind rationale Funktionen von $t(\omega_1, \omega_2)$ mit rationalen Koeffizienten.

3. Kapitel.

Allgemeine komplexe Multiplikation

Unter Beachtung der Definition (3) soll nun gezeigt werden:

$$u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \overline{\mathfrak{w}}) = R[u(z), u_1(z)]$$

Es soll diese rationale Funktion R angegeben werden. Ferner sind die in R vorkommenden Koeffizienten als rationale Funktionen gewisser singulärer Moduln mit Zahlkoeffizienten aus $k(\sqrt{m})$ nachzuweisen. Gemäß den Betrachtungen (4) machen wir stets die Voraussetzung $(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}) = (1)$.

§ 1. Pole und Nullstellen.

$u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w})$ hat Pole erster Ordnung für $\sigma z \equiv 0, -\frac{\omega_3}{2} \pmod{\overline{\mathfrak{w}}}$ und Nullstellen erster Ordnung für $\sigma z \equiv -\frac{\overline{\omega}_1}{2}, -\frac{\overline{\omega}_2}{2} \pmod{\overline{\mathfrak{w}}}$ (41)

Es ist einfach, zuerst die *Pole erster Ordnung* $\sigma z \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{w}}}$ zu untersuchen.

Solche Pole ergeben sich für alle $z = \lambda_4 = \frac{\Omega_{4i}}{\sigma}, \Omega_{4i} \varepsilon \overline{\mathfrak{w}}$, oder als Idealbruch für alle $z = \left(\frac{\overline{\mathfrak{n}} \mathfrak{w}}{\mathfrak{n} \mathfrak{n}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{n}}\right)$. (42)

Da $\mathfrak{w}/\overline{\mathfrak{w}}$, so sind alle Zahlen $\Omega_{4i} \varepsilon \overline{\mathfrak{w}}$ auch $\varepsilon \mathfrak{w}$. Um nun alle und nur die Pole zu erhalten, welche den Polen (42) im Periodenparallelogramm P ähnlich, untereinander aber nicht ähnlich sind²¹⁾, haben unsere Ω_{4i} offenbar die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

$$\Omega_{4i} - \Omega_{4k} \not\equiv 0 \pmod{\sigma \mathfrak{w}}, \sigma z \text{ zu } \mathfrak{w} \text{ teilerfremd, } i \neq k \quad (43)$$

$$\text{und } \Omega_{4i} \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{w}}} \quad (44)$$

Diese Ω_{4i} kann man so finden:

Der Bedingung (43) genügen höchstens $n(\sigma \mathfrak{w}) = n(\mathfrak{n}) \cdot n(\overline{\mathfrak{n}}) \cdot n(\mathfrak{w})$ Zahlen²²⁾. (45)

Um diejenigen unter diesen, die auch (44) erfüllen, zu erhalten, gehen wir wie folgt vor:

1. Es sei $\mathfrak{n}$ mit $(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}) = (1)$ vorgegeben. $\mathfrak{n}$ habe ferner die kanonische Basis $(v, s + t\omega)^{23})$. Dann ist es immer möglich, ein $w \varepsilon \mathfrak{w}$ zu wählen, welches zu $\mathfrak{n}$

²¹⁾ Ähnlichkeit bezüglich einer Gruppe: [1], pag. 79 und 80.

²²⁾ [1], pag. 56, und [10], Satz 97, pag. 28.

²³⁾ Kanonische Basis und ihre Eigenschaften: [1], pag. 53.

teilerfremd ist²⁴⁾. Man kann nämlich etwa in der zur Idealklasse von w inversen Klasse ein zu n teilerfremdes w^* nehmen und $(w) = w \cdot w^*$ setzen²⁵⁾.

2. Man gibt ein $\mu \in n$ vor. Nun wählt man $\bar{n}$ in der zur Idealklasse von n inversen Klasse zu w und (μ) teilerfremd²⁶⁾.

3. Man nimmt $n(n)$ modulo n inkongruente v_i , $i = 1 \dots n(n)$. Diese sind etwa gegeben durch die $c + d\omega$, $c = 0, 1, \dots, v-1$, $d = 0, 1, \dots, t-1$.

4. Wegen $(\mu, \bar{n}) = (1)$ lassen sich die folgenden Kongruenzen nach ξ_i lösen:

$$v_i + \xi_i \mu \equiv 0 \pmod{\bar{n}}, \quad i = 1 \dots n(n) \quad (46)$$

Dabei bleiben die $(v_i + \xi_i \mu)$ inkongruent modulo n .

5. Zufolge 1 ist nun

$$w(v_i + \xi_i \mu) = \Omega_{4i} \equiv 0 \pmod{\bar{w}}, \quad \text{denn } \bar{w} = \bar{n} w \quad (47)$$

und ebenso $\Omega_{4i} \equiv 0 \pmod{w}$, da $w/\bar{w}$

Diese Werte Ω_{4i} sind wegen $(w, n) = (1)$ immer noch inkongruent modulo n .

6. Die in (47) gefundenen Werte erfüllen aber nicht nur (44), sondern auch (43). Denn aus $\Omega_{4i} - \Omega_{4k} \equiv 0, i \neq k \pmod{\sigma w}$ würde sofort $v_i \equiv v_k \pmod{n}$ folgen, was 3 widerspricht.

7. Gäbe es umgekehrt $n' > n(n)$ Zahlen Ω_{4i} , welche (43) und (44) erfüllen, so erhielte man in den $\Omega_{4i} + \bar{w}_i$

$$i = 1 \dots n', \quad l = 1 \dots n(\bar{w}),$$

wo die $\bar{w}_i$ ein Restsystem modulo $\bar{w}$ durchlaufen,

$n' \cdot n(\bar{w}) > n(\sigma w)$ Zahlen, welche alle (43) erfüllen. Das stellt einen Widerspruch mit (45) dar.

Die andern Pole und Nullstellen (41) erhält man durch analoge Überlegungen in den

$$z = \lambda_h = -\frac{\bar{\omega}_h}{2\sigma} + \frac{\Omega_{hi}}{\sigma} \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n(n) \\ h = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

Dabei kann $\Omega_{hi} = \Omega_{4i}$, $h = 1, 2, 3$, gesetzt werden.

Wir fassen zusammen im

8. Satz: Es gibt je $n(n)$ und nur je $n(n)$ Zahlen

$$\lambda_h = -\frac{\bar{\omega}_h}{2\sigma} + \frac{\Omega_{hi}}{\sigma} \quad \begin{matrix} h = 1, 2, 3 \\ i = 1 \dots n(n) \end{matrix}$$

²⁴⁾ w zu n teilerfremd bedeutet: Hauptideal (w) zu n teilerfremd.

²⁵⁾ [1], Satz 56, pag. 55.

²⁶⁾ [1], Satz 56, pag. 55.

beziehungsweise

$$\lambda_4 = \frac{\Omega_{4i}}{\sigma}$$

für welche

$$\sigma \lambda_h + \frac{\bar{\omega}_h}{2} \equiv 0 \pmod{\bar{w}}$$

beziehungsweise

$$\sigma \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\bar{w}}$$

und von denen keine zwei bezüglich des Periodenparallelogramms P ähnlich sind.

§ 2. Unterscheidungen.

Wie im Spezialfall der natürlichen Multiplikation wollen wir im nächsten Paragraphen Funktionen konstruieren, welche dieselben Pole und Nullstellen wie $u(\sigma z; \bar{w})$ haben. In den zu bildenden Produkten sind dann analog (26) die folgenden λ_h auszulassen:

$$(A) \lambda_h \equiv 0, \frac{\omega_k}{2} \pmod{w}. \text{ Für diese ist } u(\lambda_h) = 0 \text{ oder } \infty$$

$$k = 1, 2, 3$$

$$h, l = 1 \dots 4 \quad (48)$$

$$(B) \lambda_h \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{w}. \text{ Für diese nimmt } u(\lambda_h) \text{ seinen Wert von 2. Ordnung an.}$$

$$(C) \lambda_h + \lambda_l \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w}. \text{ Für diese ist } u(\lambda_h) = u(\lambda_l), \text{ eines davon ist in den Produkten auszulassen.}$$

Wir leiten nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ab, für welche A , B und C erfüllt sind. So werden wir Aufschluß erhalten über die verschiedenen Fälle, welche wir gesondert betrachten müssen.

Aus der Kongruenz A ergibt sich:

$$\lambda_h \equiv 0 \pmod{w} \quad h = 1 \dots 4$$

Diese Kongruenz ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\Omega_{hi}}{\sigma} \equiv \frac{\bar{\omega}_h}{2\sigma} \pmod{w}, \text{ also } \Omega_{hi} \equiv \frac{\bar{\omega}_h}{2} \pmod{\sigma w}, \quad h = 1, 2, 3$$

beziehungsweise

$$\frac{\Omega_{4i}}{\sigma} \equiv 0 \pmod{w}, \text{ also } \Omega_{4i} \equiv 0 \pmod{\sigma w}$$

Da aber die Ω_{hi} in $\bar{w}$ liegen müssen, so kann nur ein $\lambda_4 \equiv 0 \pmod{w}$ sein. Ein solches ist vorhanden, wie sich sofort aus der Entwicklung von Satz 8 ergibt. Ferner umfaßt A die Kongruenzen:

$$\lambda_h \equiv -\frac{\omega_k}{2} \pmod{\mathfrak{w}} \quad \begin{matrix} h = 1 \dots 4 \\ k = 1 \dots 3 \end{matrix}$$

Diese Kongruenz ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\Omega_{hi}}{\sigma} \equiv \frac{\bar{\omega}_h}{2\sigma} \pm \frac{\omega_k}{2} \pmod{\mathfrak{w}}, \text{ also } \Omega_{hi} \equiv \frac{\bar{\omega}_h}{2} \pm \frac{\sigma \omega_k}{2} \pmod{\sigma \mathfrak{w}}, \quad h = 1, 2, 3$$

beziehungsweise

$$\frac{\Omega_{4i}}{\sigma} \equiv \pm \frac{\omega_k}{2} \pmod{\mathfrak{w}}, \text{ also } \Omega_{4i} \equiv \pm \frac{\sigma \omega_k}{2} \pmod{\sigma \mathfrak{w}}$$

Da aber die Ω_{hi} in $\bar{\mathfrak{w}}$ liegen müssen, so ergeben sich folgende notwendige Bedingungen:

$$\sigma \omega_k \equiv -\bar{\omega}_h \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}}, \quad h = 1, 2, 3, \text{ denn } \bar{\mathfrak{w}}/\sigma \mathfrak{w}$$

beziehungsweise für $h = 4$

$$\sigma \omega_k \equiv 0 \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}}$$

Die hergeleiteten Bedingungen sind auch hinreichend.

Ferner können sie bei festem h und k wegen (43) nur für ein i auftreten.

Wir fassen zusammen im

9. Satz:

Ein $\lambda_h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$ tritt nur für $h = 4$ einmal auf.

Ein $\lambda_h \equiv -\frac{\omega_k}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$ tritt dann und nur dann einmal auf, wenn

$$\begin{aligned} \sigma \omega_k &\equiv -\bar{\omega}_h \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}} && \text{für } h = 1, 2, 3 && k = 1, 2, 3 \\ \sigma \omega_k &\equiv 0 \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}} && \text{für } h = 4 \end{aligned} \quad (49)$$

Es stellt sich nun die Frage, wieviele Paare von Indices h und k die Kongruenzen (49) gleichzeitig erfüllen können. Wegen $\sigma \omega_3 = \sigma \omega_1 + \sigma \omega_2$ sind bei Vorgabe einer Kongruenz von (49), zum Beispiel $\sigma \omega_1 \equiv -\bar{\omega}_1 \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}}$, auch für $\sigma \omega_2$ und $\sigma \omega_3$ nur noch gewisse Kongruenzen (49) erfüllbar. Man erhält alle Kombinationen solcher Indicespaare, indem man die ganzen rationalen Koeffizienten von $\sigma \omega_k$ ($k = 1, 2, 3$), gemäß (49) durch die Basis $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ dargestellt, modulo 2 betrachtet, und die Möglichkeiten untersucht, die dann wegen $\sigma \omega_3 = \sigma \omega_1 + \sigma \omega_2$ für die $\sigma \omega_i$, $i \neq k$, noch bleiben. Eine ausführliche Durchrechnung ergibt, daß folgende Fälle zu unterscheiden sind:

- 1) $\sigma \omega_1 \equiv \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_1$, $\sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}}$ sind erfüllt;
somit ist je ein $\lambda_1 \equiv \frac{\omega_1}{2}$, $\lambda_1 \equiv \frac{\omega_2}{2}$, $\lambda_4 \equiv \frac{\omega_3}{2}$, $\lambda_4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$

$$\text{2) } \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_1, \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_3, \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_2 \pmod{2\bar{w}};$$

$$\text{so mit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \lambda_2 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \lambda_3 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w}$$

$$\text{3) } \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_1, \sigma \omega_2 \equiv 0, \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_1 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}};$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \lambda_1 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \lambda_4 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$$

$$4) \quad \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_1, \quad \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_2, \quad \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_3 \pmod{2\bar{\omega}};$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\omega}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_2, \quad \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_2, \quad \sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2\bar{w}}; \\ & \text{somit: } \lambda_2 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_2, \quad \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_3, \quad \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_1 \pmod{2\bar{w}}; \\ & \text{somit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_2, \quad \sigma \omega_2 \equiv 0, \quad \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_2 \pmod{2\bar{w}}; \\ & \text{somit: } \lambda_2 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \sigma \omega_1 &\equiv \bar{\omega}_2, \quad \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_1, \quad \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_3 \pmod{2\bar{w}}; \\ \text{so mit: } \lambda_1 &\equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad \sigma \omega_1 &\equiv \bar{\omega}_3, \quad \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_3, \quad \sigma \omega_2 \equiv 0 \pmod{2\bar{\mathfrak{w}}}; \\ \text{somit: } \lambda_3 &\equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}} \quad (50) \end{aligned}$$

$$10) \quad \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_3, \quad \sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_1, \quad \sigma \omega_2 \equiv \bar{\omega}_2 \pmod{2\mathfrak{w}};$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad & \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_3, \quad \sigma \omega_3 \equiv \omega_2, \quad \sigma \omega_2 \equiv \omega_1 \pmod{2\mathfrak{w}}; \\ & \text{somit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}} \end{aligned}$$

$$12) \quad \sigma \omega_1 \equiv \bar{\omega}_3, \quad \sigma \omega_2 \equiv \omega_3, \quad \sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{w}};$$

$$\text{somit: } \lambda_3 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$$

$$13) \quad \sigma \omega_1 \equiv 0, \quad \sigma \omega_2 \equiv \omega_3, \quad \sigma \omega_3 \equiv \omega_3 \pmod{2w};$$

$$\text{somit: } \lambda_3 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w}$$

$$14) \quad \sigma \omega_1 \equiv 0, \quad \sigma \omega_2 \equiv \omega_1, \quad \sigma \omega_3 \equiv \omega_1 \pmod{2w};$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_1 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w}$$

$$15) \quad \sigma \omega_1 \equiv 0, \quad \sigma \omega_2 \equiv \omega_2, \quad \sigma \omega_3 \equiv \omega_2 \pmod{2w};$$

$$\text{somit: } \lambda_2 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \quad \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \quad \lambda_4 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \quad \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w}$$

$$16) \quad \sigma \omega_1 \equiv \sigma \omega_2 \equiv \sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2w};$$

$$\text{somit: } \lambda_4 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \lambda_4 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \lambda_4 \equiv \frac{\omega_3}{2}, \lambda_4 \equiv 0 \pmod{w}$$

Der Satz 9 umfaßt also diese 16 Fälle (50).

Aus der Kongruenz B ergibt sich:

$$\lambda_h \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}}, \quad h = 1 \dots 4$$

Diese Kongruenz ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\Omega_{hi}}{\sigma} \equiv \frac{\bar{\omega}_h}{2\sigma} \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}}, \quad \text{oder } \Omega_{hi} \equiv \frac{\bar{\omega}_h}{2} \pm \frac{\sigma \omega_3}{4} \pmod{\sigma \mathfrak{w}} \\ h = 1, 2, 3$$

beziehungsweise für $h = 4$:

$$\frac{\Omega_{4i}}{\sigma} \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}}, \quad \text{oder } \Omega_{4i} \equiv \pm \frac{\sigma \omega_3}{4} \pmod{\sigma \mathfrak{w}}$$

Aus der Forderung (44), wonach die Ω_{hi} in $\bar{\mathfrak{w}}$ liegen müssen, ergeben sich folgende notwendige und wiederum auch hinreichende Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_h & \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 1, 2, 3 \\ \sigma \omega_3 \equiv 0 & \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 4 \end{array} \right\} \quad \text{denn es ist } \bar{\mathfrak{w}} / \sigma \mathfrak{w}$$

Man findet analog als notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Kongruenzen

$$\lambda_h \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{\mathfrak{w}}: \\ \sigma(\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_h \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 1, 2, 3 \\ \sigma(\omega_1 - \omega_2) \equiv 0 \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 4$$

Wir fassen zusammen:

10. Satz:

Ein $\lambda_h \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}}$ tritt dann und nur dann auf, wenn

$$\begin{array}{ll} \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_h & \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 1, 2, 3 \\ \sigma \omega_3 \equiv 0 & \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 4 \end{array}$$

Ein $\lambda_h \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{\mathfrak{w}}$ tritt dann und nur dann auf, wenn (51)

$$\begin{array}{ll} \sigma(\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_h & \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 1, 2, 3 \\ \sigma(\omega_1 - \omega_2) \equiv 0 & \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}} \text{ für } h = 4 \end{array}$$

Zunächst ersieht man aus (51), daß $\sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$ stets erfüllt sein muß. Somit kann es sich bei (51) nur um Unterfälle der unter (50) abgeleiteten Fälle 1, 5, 12, 16 handeln.

Wiederum stellt sich die Frage, welche der Kongruenzen (51) gleichzeitig erfüllt sein können. Eine analoge Überlegung wie unter (49) — die ganzen rationalen Koeffizienten sind hier modulo 4 zu betrachten — ergibt:

$$16a) \quad \sigma \omega_3 \equiv \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_1 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega}) \text{ sind erfüllt;}$$

$$\text{somit ist je ein } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

Der Vergleich mit (50) ergibt, daß es sich hier um einen Unterfall von 16 handelt.

$$12a) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_1, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_2 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega}) \text{ sind erfüllt;}$$

$$\text{somit ist je ein } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

Der Vergleich mit (50) ergibt, daß es sich um einen Unterfall von 12 handelt.

Und ebenso:

$$5a) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_1, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \omega_3 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$1a) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_1, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$16b) \quad \sigma \omega_3 \equiv \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_2 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega}); \quad (52)$$

$$\text{somit: } \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$12b) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_2, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_1 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}, \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$5b) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_2, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$1b) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_2, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_3 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$16c) \quad \sigma \omega_3 \equiv \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_3 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$12c) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_3, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$5c) \quad \sigma \omega_3 \equiv 2 \bar{\omega}_3, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_1 \quad (\text{mod. } 4 \bar{\omega});$$

$$\text{somit: } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}, \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \quad (\text{mod. } \mathfrak{w})$$

$$\begin{aligned}
1c) \quad \sigma \omega_3 &\equiv 2 \bar{\omega}_3, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_2 \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}}; \\
&\text{somit: } \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}, \quad \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}} \\
16d) \quad \sigma \omega_3 &\equiv \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 0 \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}}; \\
&\text{somit: } \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \quad \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{\mathfrak{w}} \\
12d) \quad \sigma \omega_3 &\equiv 0, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_3 \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}}; \\
&\text{somit: } \lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}, \quad \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}} \quad (52) \\
5d) \quad \sigma \omega_3 &\equiv 0, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_2 \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}}; \\
&\text{somit: } \lambda_2 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}, \quad \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}} \\
1d) \quad \sigma \omega_3 &\equiv 0, \quad \sigma (\omega_1 - \omega_2) \equiv 2 \bar{\omega}_1 \pmod{4 \bar{\mathfrak{w}}}; \\
&\text{somit: } \lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}, \quad \lambda_4 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4} \pmod{\mathfrak{w}}
\end{aligned}$$

Der Satz 10 umfaßt diese 16 Fälle (52). Satz 9 und Satz 10 ergeben also insgesamt 28 verschiedene Fälle, je nach den Eigenschaften von σ .

Wir müssen nun noch die *Kongruenzen* (48c) untersuchen. Diese Untersuchung gibt uns Aufschluß, von welchen Paaren $\lambda_h, \lambda_l, h, l = 1 \dots 4$, nur je eines auftreten darf.

$$(48c) \text{ lautet: } \lambda_l + \lambda_h \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}},$$

$$\text{wobei } \lambda_l = -\frac{\bar{\omega}_l}{2\sigma} + \frac{\Omega_{li}}{\sigma}, \quad l = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = \frac{\Omega_{4i}}{\sigma}$$

$$\text{und } \lambda_h = -\frac{\bar{\omega}_h}{2\sigma} + \frac{\Omega_{hk}}{\sigma}, \quad h = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = \frac{\Omega_{4k}}{\sigma}$$

Diese Kongruenz hat, wenn etwa Ω_{li} vorgegeben ist, nur die Lösung:

$$\frac{\Omega_{hk}}{\sigma} \equiv -\frac{\Omega_{li}}{\sigma} + \frac{\bar{\omega}_l + \bar{\omega}_h}{2\sigma} - \frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}} \quad h, l = 1, 2, 3$$

$$\text{also } \Omega_{hk} \equiv -\Omega_{li} + \frac{\bar{\omega}_l + \bar{\omega}_h}{2} - \frac{\sigma \omega_3}{2} \pmod{\sigma \mathfrak{w}}.$$

Nun müssen aber die Ω_{hk} in $\mathfrak{w}$ liegen; es ergeben sich also wegen $\bar{\mathfrak{w}}/\sigma \mathfrak{w}$ die folgenden notwendigen und wiederum auch hinreichenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_l + \bar{\omega}_h &\equiv \sigma \omega_3 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}, & h, l &= 1, 2, 3 \\
\bar{\omega}_l &\equiv \sigma \omega_3 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}, & h &= 4 \\
\bar{\omega}_h &\equiv \sigma \omega_3 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}, & l &= 4 \\
0 &\equiv \sigma \omega_3 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}, & h &= l
\end{aligned}$$

Wir sprechen das Ergebnis aus im

11. Satz: Ein λ_l und λ_h erfüllen dann und nur dann die Kongruenz

$$\lambda_l + \lambda_h \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$$

wenn

$$\sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_l + \bar{\omega}_h \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}, \quad h, l = 1, 2, 3 \quad (53)$$

beziehungsweise $\sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_l \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$ oder $\sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_h \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$ für h oder $l = 4$

Betrachtet man die verschiedenen möglichen Kombinationen h, l , so ergeben sich aus (53) die folgenden Kongruenzen:

- 1) $\sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$, je ein λ_l und ein λ'_l ergeben $u(\lambda_l) = u(\lambda'_l)$
- 2) $\sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_1 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$, je ein λ_2 und ein λ_3 ergeben $u(\lambda_2) = u(\lambda_3)$,
ebenso ein λ_1 und ein λ_4 . (54)
- 3) $\sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_2 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$, je ein λ_1 und ein λ_3 ergeben $u(\lambda_1) = u(\lambda_3)$,
ebenso ein λ_2 und ein λ_4 .
- 4) $\sigma \omega_3 \equiv \bar{\omega}_3 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}}$, je ein λ_1 und ein λ_2 ergeben $u(\lambda_1) = u(\lambda_2)$,
ebenso ein λ_3 und ein λ_4 .

§ 3. Multiplikationsformeln.

In diesem Paragraphen sollen die rationalen Funktionen $R(u, u_1)$ angegeben werden, welche gleich $u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w})$ sind. Hier sind nun vor allem die Ergebnisse der Sätze 9, 10, 11 zu berücksichtigen. Dabei wird es sich zeigen, daß die in (50) und (52) genannten 28 Fälle durch immer mögliche, die Voraussetzungen nicht ändernde Transformationen der Basis der Periodenideale (Substitutionen der Modulgruppe)²⁷⁾ auf wenige, leicht zu behandelnde Fälle zurückgeführt werden können.

Wir beginnen mit *Fall 16*, der eine zusätzliche Untersuchung verlangt.

Es gelten also nach (50) die Kongruenzen:

$$\sigma \omega_1 \equiv \sigma \omega_2 \equiv \sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{2 \bar{\mathfrak{w}}} \quad (55)$$

Daraus ergibt sich zunächst eine Eigenschaft der Norm des Ideals $\mathfrak{n}$:

Aus (55) folgt: $\sigma \mathfrak{w} = (\sigma \omega_1, \sigma \omega_2)$ ist in $2 \bar{\mathfrak{w}}$ enthalten, somit $2 \bar{\mathfrak{w}} / \sigma \mathfrak{w}$ oder

$$2 \bar{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{g} = \sigma \mathfrak{w} = \mathfrak{n} \bar{\mathfrak{n}} \mathfrak{w} \quad (56)$$

²⁷⁾ Modulgruppe und ihre Substitutionen: [1], pag. 1 ff. und pag. 52.

Nach einem bekannten Satz der Zahlentheorie gilt dann²⁸⁾:

$$n(\sigma w) = n(n) \cdot n(\bar{n}) \cdot n(w) = n(2) \cdot n(\bar{n}) \cdot n(w) \cdot n(g)$$

es ist $n(2) = 4$ in $k(\sqrt{m})^{29)}$,

deshalb:
$$n(n) \equiv 0 \pmod{4} \quad (57)$$

(55) ist nach (54) hinreichend dafür, daß für gleiches h die Kongruenz

$$\lambda_h + \lambda'_h \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{4} \quad (58)$$

erfüllt ist.

Es sei vorerst $h = 4$:

Ist also ein $\lambda_4 = \frac{\Omega_{4i}}{\sigma}$ vorgegeben, so wird ihm durch (58) ein $\lambda'_4 = \frac{\Omega_{4k}}{\sigma}$ zugeordnet. Eines der beiden ist in der Produktdarstellung für $u(nz; w)$ auszulassen. Zur Bestimmung des Grades ist es nötig, zu wissen, in wievielen Fällen sich aus (58) $\lambda_4 = \lambda'_4$ ergibt. Diese sind vorerst auszuschneiden; von allen andern durch (58) zugeordneten ist dann nur eines zu nehmen.

Wir gehen so vor:

Ω_{4i} ist gemäß der Herleitung des Satzes 8 gegeben durch

$$\Omega_{4i} = w(v_i + \bar{v}_i \mu),$$

wo $\bar{v}_i$ die Lösung der Kongruenz (46) modulo $\bar{n}$ ist.

Für $\lambda_h = \lambda'_h$ gilt nun nach (58):

$$2\lambda_h \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w} \quad (59)$$

oder also für $h = 4$:
$$2\lambda_4 \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w}$$

oder
$$2w(v_i + \bar{v}_i \mu) \equiv -\frac{\sigma \omega_3}{2} \pmod{\sigma w} \quad (60)$$

Nach (56) folgt daraus:

$$2 \cdot 2 \cdot w(v_i + \bar{v}_i \mu) \equiv -\sigma \omega_3 \pmod{4 \bar{w}}$$

Oder mit Hilfe von (46):

$$\sigma \omega_3 \equiv 0 \pmod{4 \bar{w}} \quad (61)$$

Somit kann (59) bei $h = 4$ nur für den Fall 16d bestehen, wie (52) ergibt.

Nun kennen wir bereits Lösungen von (59): $\pm \frac{\omega_3}{4}$, $\pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}$.

²⁸⁾ [10], Satz 97, pag. 28.

²⁹⁾ [1], pag. 53.

Diese befinden sich ja in 16d unter den λ_4 , wie wiederum (52) zeigt. Es bleibt somit nur noch zu zeigen, daß nicht mehr als 4 Lösungen von (59) existieren:

Aus (60) folgt notwendig:

$$2 v_i w \equiv -\frac{\sigma \omega_3}{2} \pmod{n} \quad (62)$$

Wegen $(w, n) = (1)$ (vgl. Herleitung von Satz 8) ist die Kongruenz $a_i w \equiv -\frac{\sigma \omega_3}{2} \pmod{n}$ stets nach a_i auflösbar. Sie hat modulo n eine und nur eine Lösung. Es sei etwa $a_i = e + f\omega$, $v, s + t\omega$ eine kanonische Basis³⁰⁾ von n und wie früher $v_i = c + d\omega$ ³¹⁾. Dann ergeben sich aus der Kongruenz $a_i \equiv 2 v_i \pmod{n}$ die folgenden beiden diophantischen Gleichungen:

$$f - 2d - yt = 0, \quad \text{daraus } d \text{ modulo } t, \quad (63)$$

$$e - 2c - xv - ys = 0, \quad \text{daraus } c \text{ modulo } v. \quad (64)$$

Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der linearen diophantischen Gleichungen haben dann (63) und (64) höchstens je 2, zusammen also höchstens 4 Lösungen. Somit sind $\pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}$ die einzigen Lösungen von (59).

In den Fällen $h \neq 4$ tritt in (60) und in den folgenden Kongruenzen noch der Term $-\frac{\omega_h}{2}$ hinzu. Es zeigt sich auf analoge Weise, daß auch jeder der Fälle 16a, b, c für einen Index h die 4 Lösungen $\pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4}$ von (59) besitzt.

Unter Verwendung dieser Resultate ergeben sich nun die Formeln:

Wir numerieren wie in (50) und (52):

16a)

$$u(nz; w) = u(\sigma z; \bar{w}) = C \cdot \frac{u_1(z) \prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)] \prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)]}{u(z) \prod_{\lambda_2} [u(z) - u(\lambda_2)] \prod_{\lambda_4} [u(z) - u(\lambda_4)]}, \quad u(z) = u(z; w) \quad (65)$$

Dabei sind nach den eben durchgeführten Überlegungen und nach den Sätzen 9, 10, 11 auszulassen:

³⁰⁾ [1], pag. 53.

³¹⁾ [1], pag. 50.

$$\lambda_4 \equiv 0 - \frac{\omega_1}{2}, -\frac{\omega_2}{2}, -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w}$$

$$\lambda_1 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{w}$$

und je eines der λ_h für die $\lambda_h + \lambda'_h \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w}$

Grad des Zählers: $\frac{1}{2} [n(n) - 4] + \frac{1}{2} n(n) = n(n) - 2$ in $u(z)$

Grad des Nenners: $\frac{1}{2} n(n) + \frac{1}{2} n(n) - 2 + 1 = n(n) - 1$ in $u(z)$.

16b) Wie (65), wenn statt der λ_1 die entsprechenden λ_2 ausgelassen werden.
16c)

$$u(nz; w) = u(\sigma z; \bar{w}) = C \cdot \frac{\prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)] \prod_{\lambda_2} [u(z) - u(\lambda_2)]}{\prod_{\lambda_3} u(z) \prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)] \prod_{\lambda_4} [u(z) - u(\lambda_4)]}, u(z) = u(z; w) \quad (66)$$

Dabei sind nach den gleichen Überlegungen wie bei (65) auszulassen:

$$\lambda_4 \equiv 0, -\frac{\omega_1}{2}, -\frac{\omega_2}{2}, -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w}$$

$$\lambda_3 \equiv \pm \frac{\omega_3}{4}, \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \pmod{w}$$

und je eines der λ_h für die $\lambda_h + \lambda_h \equiv -\frac{\omega_3}{2} \pmod{w}$

Grad des Zählers: $\frac{1}{2} n(n) + \frac{1}{2} n(n) = n(n)$ in $u(z)$

Grad des Nenners: $\frac{1}{2} [n(n) - 4] + \frac{1}{2} n(n) - 2 + 1 = n(n) - 3$ in $u(z)$.

Kontrollbeispiel: natürliche Multiplikation für $n \equiv 2 \pmod{4}$: Formel (40) stimmt für ihren Spezialfall mit (66) überein.

16d) Wie (66), wenn statt der λ_3 die entsprechenden λ_4 ausgelassen werden.

Kontrollbeispiel: natürliche Multiplikation für $n \equiv 0 \pmod{4}$: Formel (40).

Nach analogen Überlegungen lassen sich nun ohne weiteres die Formeln für die Fälle 4, 8, 9, 13 von (50) angeben. Hier können wegen (54) die λ_3 und die λ_4 weggelassen werden. Deshalb ist hier keine den Gleichungen (58) bis (64) entsprechende Untersuchung nötig.

Fall 4:

$$u(nz; w) = u(\sigma z; \bar{w}) = C \cdot \frac{u(z) \prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)]}{\prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)]}, u(z) = u(z; w) \quad (67)$$

Dabei sind wegzulassen: $\lambda_1 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$

Grad des Zählers: $n(\mathfrak{n})$ in $u(z)$

Grad des Nenners: $n(\mathfrak{n}) - 1$ in $u(z)$.

Kontrollbeispiel: natürliche Multiplikation für $n \equiv 1 \pmod{2}$: Formel (39).

Fall 8:

$$u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \bar{\mathfrak{w}}) = C \cdot \frac{u(z) \prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)]}{\prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)]}, u(z) = u(z; \mathfrak{w}) \quad (68)$$

Dabei sind wegzulassen: $\lambda_1 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \lambda_3 \equiv \frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$

Grad des Zählers: $n(\mathfrak{n})$ in $u(z)$

Grad des Nenners: $n(\mathfrak{n}) - 1$ in $u(z)$.

Fall 9:

$$u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \bar{\mathfrak{w}}) = C \cdot \frac{\prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)]}{u(z) \prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)]}, u(z) = u(z; \mathfrak{w}) \quad (69)$$

Dabei sind wegzulassen: $\lambda_3 \equiv \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$

Grad des Zählers: $n(\mathfrak{n})$ in $u(z)$

Grad des Nenners: $n(\mathfrak{n}) - 1$ in $u(z)$.

Fall 13:

$$u(\mathfrak{n}z; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \bar{\mathfrak{w}}) = C \cdot \frac{\prod_{\lambda_1} [u(z) - u(\lambda_1)]}{u(z) \prod_{\lambda_3} [u(z) - u(\lambda_3)]}, u(z) = u(z; \mathfrak{w}) \quad (70)$$

Dabei sind wegzulassen: $\lambda_3 \equiv \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2} \pmod{\mathfrak{w}}$

Grad des Zählers: $n(\mathfrak{n})$ in $u(z)$

Grad des Nenners: $n(\mathfrak{n}) - 1$ in $u(z)$.

Endlich seien nun die Basistransformationen in $\mathfrak{w}$ oder $\bar{\mathfrak{w}}$ durch Substitutionen der Modulgruppe angegeben, die gestatten, alle andern Fälle von (50) auf die bereits behandelten zurückzuführen:

Fall 1: Periodentransformation in $\mathfrak{w}$: $\omega'_1 = \omega_1 - \omega_2, \omega'_2 = \omega_2; (\omega_1, \omega_2) = (\omega'_1, \omega'_2)$
Das ergibt zunächst Fall 14.

Fall 2: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 4.

Fall 3: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 9.

Fall 5: Periodentransformation in w : $\omega'_1 = \omega_1 - \omega_2, \omega'_2 = \omega_2$; $(\omega_1, \omega_2) = (\omega'_1, \omega'_2)$
 Das ergibt zunächst Fall 15.

Fall 6: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 8.

Fall 7: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 9.

Fall 10: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 4.

Fall 11: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 8.

Fall 12: Periodentransformation in w : $\omega'_1 = \omega_1 - \omega_2, \omega'_2 = \omega_2$; $(\omega_1, \omega_2) = (\omega'_1, \omega'_2)$
 Das ergibt Fall 13.

Fall 14: Periodentransformation in $\bar{w}$: $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 13.

Fall 15: Periodentransformation in w : $\omega'_1 = \bar{\omega}_1, \omega'_2 = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$; $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2)$
 Das ergibt Fall 13.

Damit sind alle in (50) unterschiedenen Fälle behandelt.

§ 4. Koeffizienten.

Da $t(\omega_1, \omega_2)$ bei unserer Wahl des Periodenideals ganz algebraisch³²⁾ ist, so sind die Koeffizienten des Nenners der natürlichen Multiplikationsformeln (39) und (40) algebraische Zahlen.

$$\text{Für } z = \lambda_3 - \frac{\bar{\omega}_3}{2\sigma} + \frac{\Omega_{3i}}{\sigma} = \frac{x_{31}\omega_1 + x_{32}\omega_2}{2\sigma\sigma'} = \frac{x_{31}\omega_1 + x_{32}\omega_2}{2s}$$

und für

$$z = \lambda_4 = \frac{\Omega_{4i}}{\sigma} = \frac{x_{41}\omega_1 + x_{42}\omega_2}{2\sigma\sigma'} = \frac{x_{41}\omega_1 + x_{42}\omega_2}{2s}$$

³²⁾ [1], pag. 104, und Satz 72, pag. 64 und 66.

(σ und σ' seien konjugiert imaginär, $\sigma\sigma' = s$ ist dann ganz rational, $\mathfrak{w}/\bar{\mathfrak{w}}$; x_{41}, x_{42} und x_{31}, x_{32} ganz rational, $i = 1 \dots n(n)$, unter Weglassung der durch die Sätze 9 und 10 ausgeschlossenen) werden die entsprechenden Nenner der natürlichen Multiplikationsformeln (39) und (40) Null.

Nach allgemeinen Sätzen der Theorie der algebraischen Zahlen folgt dann³³⁾:

12. Satz: Die $u(\lambda_3)$ und $u(\lambda_4)$ der allgemeinen komplexen Multiplikationsformeln sind algebraische Zahlen.

Zur Untersuchung der Koeffizienten betrachten wir Formel (67), die wir folgendermaßen abkürzen:

$$u(nz; \mathfrak{w}) = Z : N \quad (71)$$

Nun erweitern wir den Bruch (71) mit $K = \prod_k (u(z) - \bar{u}_k)$, wo die $\bar{u}_k$ alle algebraisch konjugierten der in (60) auftretenden $u(\lambda_3)$ durchlaufen. Wir erhalten:

$$u(nz; \mathfrak{w}) = ZK : NK \quad (72)$$

Die Koeffizienten der Potenzen von $u(z)$ in NK sind dann rationale Zahlen, da sie symmetrische Funktionen von algebraisch konjugierten Zahlen sind. Wenn wir den Grad in $u(z)$ des Zählers ZK mit m bezeichnen, so hat NK den Grad $m-1$. (72) heißt dann:

$$u(nz; \mathfrak{w}) = u(\sigma z; \bar{\mathfrak{w}}) = \frac{\alpha_m u(z)^m + \alpha_{m-1} u(z)^{m-1} + \dots + \alpha_0}{u(z)^{m-1} + \alpha_{m-2} u(z)^{m-2} + \dots + \alpha_0} \quad (73)$$

Die α_i sind nach obigem rational. Jetzt entwickeln wir in $NK \cdot u(nz; \mathfrak{w}) = ZK$ beide Seiten nach ζ , mit Benutzung der sich aus (11) ergebenden Reihen:

$$u(z)^r = \frac{d_{-r}^{(r)}}{\zeta^r} + \frac{d_{-r+2}^{(r)}}{\zeta^{r-2}} + \dots + d_0^{(r)} + d_1^{(r)} \zeta + \dots \quad r = 1 \dots m \quad (74)$$

$$d_0^{(r)} = 0, \text{ wenn } r \equiv 1 \pmod{2}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{b_{-m}}{\zeta^m} + \frac{b_{-m+1}}{\zeta^{m-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{\zeta} + b_0 + b_1 \zeta \dots \\ = \frac{\beta_{-m}}{\zeta^m} + \frac{\beta_{-m+1}}{\zeta^{m-1}} + \dots + \frac{\beta_{-1}}{\zeta} + \beta_0 + \beta_1 \zeta + \dots \end{aligned}$$

Dabei sind die b_i rationale Funktionen von $\mathfrak{f}(\omega_1, \omega_2)$ und $\mathfrak{f}(\omega_1, \bar{\omega}_2)$ mit Koeffizienten aus $k(\sqrt{m})$.

³³⁾ [10], pag. 26.

Koeffizientenvergleich ergibt nun dasselbe für die β_i und die α_i :

$$b_{-m} = \beta_{-m} = \alpha_m \cdot 2^m, \text{ also } \alpha_m = R_m(t, \bar{t}) \text{ mit Koeffizienten aus } k(\sqrt{m}); \bar{t} = t(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$$

$$b_{-m+1} = \beta_{-m+1} = \text{lineare Funktion von } \alpha_{m+1} = L_{-m-1}(\alpha_{m-1}) \\ \text{also } \alpha_{m-1} = R_{m-1}(t, \bar{t})$$

und ebenso:

$$b_{-m+2} = \beta_{-m+2} = L_{-m+2}(\alpha_m, \alpha_{m-2}), \text{ also } \alpha_{m-2} = R_{m-2}(t, \bar{t})$$

$$b_{-m+3} = \beta_{-m+3} = L_{-m+3}(\alpha_{m-1}, \alpha_{m-3}), \text{ also } \alpha_{m-3} = R_{m-3}(t, \bar{t}) \quad \text{usw.}$$

Wir bemerken, daß stets nur ein neues, zu bestimmendes α_i auftritt. Dies gilt für alle α_i , wie die Reihe (74), eingesetzt in (73), zeigt.

Die α_i sind also rationale Funktionen von $t(\omega_1, \omega_2)$ und $t(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ mit Koeffizienten aus $k(\sqrt{m})$. Durch einen euklidischen Algorithmus können nun ZK und NK wieder von ihren gemeinsamen Teilern befreit werden. Dann erhalten wir — wie die Überlegungen des vorigen Paragraphen zeigen — wieder $Z:N$, also (67). Es entstehen durch solche rationale Operationen Koeffizienten von denselben Eigenschaften wie die α_i .

Man bemerkt, daß diese Überlegungen auch für die Formeln (65), (66), (68), (69), (70) gelten.

Bei einigen spezielleren Voraussetzungen über die Periodenideale und ihre Basen³⁴⁾ kann man zeigen, daß $t(\omega_1, \omega_2)$ den Ringklassenkörper des Führers 4, den sogenannten singulären Körper von t , festlegt. Diese Voraussetzungen sind jedoch so, daß sie gleichwohl alle Darlegungen dieses Kapitels gestatten. Auch die Koeffizienten der allgemeinen komplexen Multiplikationsformeln sind demnach unter diesen Voraussetzungen Zahlen des Ringklassenkörpers des Führers 4.

Eine ausführliche Zusammenfassung unserer Ergebnisse ist in der Einleitung angegeben.

Es gilt somit: $u(nz; w) = R[u(z), u_1(z)]$, wo R eine rationale Funktion im Körper zugehöriger singulärer Moduln ist. Q. E. D.

Luzern, im März 1950.

³⁴⁾ [1], pag. 111 bis 117; vgl. auch [3], pag. 43ff.

Literaturnachweis

- [1] R. FUETER: Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Erster Teil Leipzig-Berlin 1924, Zweiter Teil 1927.
- [2] R. FUETER: Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern. Nachr. der Ges. der Wissensch. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1927. Erste Mitteilung pag. 336ff., Zweite Mitteilung pag. 427ff.
- [3] R. FUETER: Diskriminante der Körper der singulären Moduln und der Teilungskörper der elliptischen Funktionen. Acta mathematica, Stockholm 1926, pag. 43ff.
- [4] M. DEURING: Die Typen der Multiplikatorringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. des Math. Sem. der Universität Hamburg, XIV, 1941, pag. 197ff.
- [5] M. DEURING: Algebraische Begründung der komplexen Multiplikation. Ebenda, XVI, 1949, pag. 32ff.
- [6] H. HASSE: Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Ebenda, X, 1934, pag. 325ff.
- [7] G. HAUSER: Teilungsgleichungen der elliptischen Funktionen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern. Inaug.-Diss. Zürich 1924.
- [8] M. GUT: Die Aufstellung der Klassen- und Ringklassengleichungen der absolut invarianten Modulfunktion. Math. Ann., vol. 98, 1927, pag. 544ff.
- [9] H. BURKHARDT: Elliptische Funktionen. Berlin-Leipzig 1920.
- [10] E. LANDAU: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Berlin-Leipzig 1918.
- [11] H. WEBER: Lehrbuch der Algebra, dritter Band. Braunschweig 1908.
- [12] H. WEBER: Komplexe Multiplikation. Encyclop. math. Wissensch. 1c, pag. 716ff., Leipzig 1900—1904.

Lebenslauf

Am 24. Juni 1925 wurde ich, Robert Ineichen, Bürger von Luzern, in Luzern geboren, durchlief hier die städtischen Schulen und erwarb im Frühling 1945 das luzernische Primarlehrerpatent. Darauf immatrikulierte ich mich an der Universität Zürich und besuchte in der Folge vor allem Vorlesungen und Übungen in Mathematik, Physik und Astronomie an der Universität und an der Eidg. Technischen Hochschule. Während des Wintersemesters 1947/48 studierte ich an der Sorbonne in Paris. In den Ferien versah ich verschiedene Stellvertretungen an Luzerner Schulen. Im Januar 1949 bestand ich die Diplomprüfungen für das höhere Lehramt in den genannten Fächern. Seit dem Herbst 1949 wirke ich als Mathematiklehrer an der Kantonsschule Luzern.

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Professor Dr. Rudolf Fueter. Ich bin ihm für sein stetes Interesse und für seine vielen wohlwollenden Anregungen zu dauerndem Dank verpflichtet.

Ebenso möchte ich auch allen andern Herren Professoren, deren Vorlesungen und Übungen ich besuchte, bestens danken.

Robert Ineichen.

